

Thema Nr. 3
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1:

Betrachten Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}x' &= x - 2y, \\y' &= ax + y - y^2,\end{aligned}$$

mit dem reellen Parameter $a < 0$.

- a) Bestimmen Sie alle konstanten Lösungen des Systems.
- b) Untersuchen Sie alle konstanten Lösungen auf ihre Stabilität in Abhängigkeit vom Parameter a .
- c) Skizzieren Sie das Phasenporträt in der Nähe der konstanten Lösungen für den Fall $a = -1$.

(6 Punkte)

Aufgabe 2:

Auf \mathbb{R}^2 sei die reellwertige Funktion $(x, y) \mapsto u(x, y) = (x - y)(x + y + 1)$ gegeben.

- a) Zeigen Sie, dass $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch ist.
- b) Bestimmen Sie alle Funktionen $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto v(x, y)$, so dass $f = u + iv$ holomorph ist und geben Sie f als Funktion von $z = x + iy \in \mathbb{C}$ an.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:

Gegeben sei eine holomorphe Funktion f auf einer Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}$ mit einer Nullstelle der Ordnung $p \in \mathbb{N}$ in z_0 durch die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

- Geben Sie eine Rekursionsformel für die Koeffizienten der Laurent-Entwicklung der Funktion $1/f$ um z_0 an.
- Berechnen Sie den Hauptteil der Laurent Entwicklung der Funktion $z \mapsto \frac{1}{\sin(z)}$ jeweils um $z_0 = 0$ und um $z'_0 = \pi$.
- Sei Γ die Kreislinie $|z - 3/2| = 2$ orientiert im positiven Sinn. Berechnen Sie

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{\sin(z)} .$$

(6 Punkte)

Aufgabe 4:

Es sei $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ stetig. Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x)(1 - y(x)) , \quad y(0) = 0 .$$

- Ist das Anfangswertproblem eindeutig lösbar?
- Untersuchen Sie die Lösungen y auf etwaige Monotonie.
- Zeigen Sie, dass $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ existiert und bestimmen Sie den Wert.
- Geben Sie explizit die Lösung im Fall $f(x) = \alpha x^{\beta-1}$ an, wobei $\alpha > 0$ und $\beta \geq 1$.

(6 Punkte)

Aufgabe 5:

Für die holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gelte $|f(z)| \leq |g(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| \leq 1$, so dass $f(z) = \lambda g(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(6 Punkte)